© Э.А. АРИНШТЕЙН, Ю.Д. КИРИЛЛОВ
kaf_mms@utmn.ru

УДК 536.2

ПРОМЕРЗАНИЕ ВЛАЖНОГО ГРУНТА (2). МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

АННОТАЦИЯ. Рассмотрено решение задачи о распространении тепла в среде с зависящими от температуры теплоемкостью и теплопроводностью. Использован метод последовательных приближений. Изучены приближения высокого порядка.

SUMMARY. Heat transfer problem has been considered. Heat capacity and heat conductivity depend on temperature. Successive approximation technique has been used. High-order approximation has been considered.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Теплопроводность, теплоемкость, локальное время, функция Грина, метод последовательных приближений.

KEY WORDS. Heat conductivity, heat capacity, local time, Green function, successive approximation technique.

Данная статья является прямым продолжением статьи [1], где рассмотрен метод последовательных приближений, с помощью которого можно рассчитывать задачи, включающие фазовый переход при некотором диапазоне температур. В [1] рассмотрено нулевое приближение. В данной работе получены выражения, по которым находятся следующие приближения решения задачи. Кроме того, рассмотрен класс задач, решения которых с помощью данного метода может быть записано в квадратурах.

Будем считать, что свойства среды зависят только от ее температуры. Фазовый переход учтем через зависимость свойств среды от температуры [2]. Тогда уравнение теплопроводности имеет вид:

$$C(T)\frac{\partial T}{\partial t} - div(\gamma(T)gradT) = 0,$$

где T — температура, t — время, $C(T)$ — эффективная теплоемкость, учитывающая теплоту фазового перехода [2], $\gamma(T)$ — теплопроводность. Это уравнение преобразуем к виду

$$C(U)\frac{\partial U}{\partial t} - \gamma(U)\Delta U = 0$$

заменой

$$U(T) = \int\gamma(T)dT. \qquad (1)$$

Теперь можно провести замену, предложенную в [1]:

$$\begin{cases} y_i = x_i, \ i = 1,2,3; \\ \tau = \tau(t, \vec{r}); \end{cases} \tag{2}$$

где

$$\tau = \tau(t, \vec{r}) = \int_0^t \frac{\gamma\big(U(t', \vec{r})\big)}{C\big(U(t', \vec{r})\big)} dt' = \int_0^t a\big(U(t', \vec{r})\big) dt' \cdot$$

Производные в декартовой системе координат преобразуются так:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial y_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y_i} = a(U)\frac{\partial}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_i} + A_i \frac{\partial}{\partial \tau},$$

где

$$A_i = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} a\big(U(t', \vec{r})\big) dt'.$$

После преобразований уравнение теплопроводности примет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \Delta U = \sum_{i=1}^{3}\left(2A_i \frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial \tau} + A_i^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \left(\frac{\partial A_i}{\partial y_i} + A_i \frac{\partial A_i}{\partial \tau}\right)\frac{\partial U}{\partial \tau}\right).$$

Нелинейные члены содержатся в правой части. При малых значениях параметров A_i уравнение можно решать методом последовательных приближений. Этот параметр содержит выражение:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} a\big(U(t', \vec{r})\big) = \frac{da}{dU}\frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Таким образом, нужно, чтобы температуропроводность медленно менялась при изменении температуры, а градиент температуры был мал. Последнее условие также является условием применимости закона Фурье для теплопроводности.

При использовании метода последовательных приближений, будем считать, что величины A_i имеют порядок ε, и решение имеет вид [3]:

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots = O(\varepsilon^0) + O(\varepsilon) + O(\varepsilon^2) + \cdots$$

Уравнения для отыскания приближений имеют вид:

$$\frac{\partial U_0}{\partial \tau} - \Delta U_0 = 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \tau} - \Delta U_1 = \sum_{i=1}^{3}\left(2A_i(U_0)\frac{\partial^2 U_0}{\partial y_i \partial \tau} + \frac{\partial A_i(U_0)}{\partial y_i}\frac{\partial U_0}{\partial \tau}\right); \qquad (4)$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial \tau} - \Delta U_k = \sum_{i=1}^{3}\left(2A_i\frac{\partial^2 U_{k-1}}{\partial y_i \partial \tau} + A_i^2\frac{\partial^2 U_{k-2}}{\partial \tau^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial A_i}{\partial y_i}\frac{\partial U_{k-1}}{\partial \tau} + A_i\frac{\partial A_i}{\partial \tau}\frac{\partial U_{k-2}}{\partial \tau}\right), k = 2,3,\dots \qquad (5)$$

Причем величины A_i нужно брать с учетом предыдущих приближений:

$$A_i = A_i(U_0 + U_1 + \dots + U_{k-1}).$$

Данный метод достаточно удобен для решения одномерных краевых задач с граничным условием первого рода. Такая задача имеет вид:

$$\begin{cases} c(T)\dfrac{\partial T}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\gamma(T)\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) = 0, x > 0, t > 0; \\ T(0,x) = g(x); \\ T(t,0) = f(t). \end{cases}$$

После указанных преобразований (1) и (2) эта задача сведется к системам, решающимся в квадратурах. Для нулевого приближения получим уравнение (3) и новые краевые условия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_0}{\partial \tau} - \dfrac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = 0, y > 0, \tau > 0; \\ U_0(0,y) = g^*(y); \\ U_0(\tau,0) = f^*(\tau). \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид [4]:

$$U_0(\tau,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\tau f^*(t)e^{\frac{-y^2}{4(\tau-t)}}\frac{y\,dt}{(\tau-t)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty g^*(s)\left(e^{\frac{-(y-s)^2}{4\tau}} - e^{\frac{-(y+s)^2}{4\tau}}\right)\frac{ds}{\tau}.$$

Для следующих приближений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_i}{\partial \tau} - \dfrac{\partial^2 U_i}{\partial y^2} = F_i(U_{i-1}, U_{i-2}, \dots U_0), y > 0, \tau > 0; \\ U_i(0,y) = 0; \\ U_i(\tau,0) = 0, \end{cases}$$

где функциями F_i обозначены правые части уравнений (4), (5). Решение этой системы имеет вид:

$$U_i(\tau,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\tau\int_0^\infty F_i\big(U_{i-1}(t,s), U_{i-2}(t,s), \dots U_0(t,s)\big)\cdot$$

$$\cdot\left(e^{\frac{-(y-s)^2}{4(\tau-t)}} - e^{\frac{-(y+s)^2}{4(\tau-t)}}\right)\frac{ds\,dt}{(\tau-t)}. \qquad (6)$$

Делаем обратные замены переменных:

$$t = t(\tau, y) = \int_0^\tau \frac{c\big(T(\tau', y)\big)}{\gamma\big(T(\tau', y)\big)} d\tau' = \int_0^\tau \frac{d\tau'}{a\big(T(\tau', y)\big)}; \qquad (7)$$

$$T(U) = \int \frac{dU}{\gamma(T)}.$$

В конечном итоге получаем параметрическое решение задачи в квадратурах:

$$\begin{cases} T = T\big(U(\tau, y)\big); \\ U = U_0(\tau, y) + U_1(\tau, y) + U_2(\tau, y) + \cdots; \\ t = t(\tau, y); \\ y = x. \end{cases} \qquad (8)$$

Таким образом, мы получаем решение любой нелинейной одномерной краевой задачи с граничными условиями первого рода в квадратурах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аринштейн Э.А. Промерзание влажного грунта // Вестник ТюмГУ. 2010. №6. С. 11-14.

2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: УРСС, 2003. 784 с.

3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для инженеров и научных сотрудников. М.: Наука, 1974. 833 с.

4. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957. 444 с.